МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 DOI 10.12737/18157

О критических нагрузках сжатой упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями *

И. М. Пешхоев[1] **

[1] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

On critical loads of compressed elastic rectangular plate with dislocations and disclinations ***

I. M. Peshkhoev[1]**

[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Рассматривается задача о критических нагрузках сжатой прямоугольной пластины, содержащей непрерывно распределенные источники собственных напряжений. Анализ задачи проводится на основе модификации системы нелинейных уравнений Кармана для больших прогибов упругих пластин с дислокациями и дисклинациями с различными вариантами краевых условий. Введением замены для функции напряжений задача сводится к исследованию двух задач: линейной краевой задачи относительно функции напряжений, вызванных внутренними источниками и системы нелинейных уравнений относительно прогиба и функции напряжений, вызванных внешними сжимающими нагрузками, которая имеет тривиальное решение. Классическая критическая нагрузка определяется как наименьшее собственное значение линейной краевой задачи, полученной линеаризацией системы нелинейных уравнений относительно тривиального решения. Рассматриваются четыре типа краевых условий: все края подвижно защемлены; все края шарнирно оперты; два противоположных края свободны от напряжений, а два других подвижно защемлены или шарнирно оперты. Равномерно распределенные сжимающие нагрузки одинаковы на противоположных краях. Установлено, что если мера несовместности является нечетной по одной переменной и четной или нечетной по другой переменной, то напряжения, вызванные только внутренними источниками, не приводят к потере устойчивости плоского равновесного состояния и не влияют на критические значения сжимающих нагрузок.

Ключевые слова: упругая пластина, дислокации и дисклинации, критическая нагрузка.

A problem on critical loads of the compressed rectangular plate containing continuously distributed sources of inherent stress is considered. The task analysis is based on the modification of the Karman nonlinear equations system for large deflections of elastic plates with dislocations and disclinations under different boundary conditions. By the introduction of a replacement for the stress function, the problem reduces to the treatment of two tasks: a linear boundary value problem concerning the stress function caused by internal sources and a system of nonlinear equations concerning the deflection and the stress function caused by external compressive loads, which possesses a trivial solution. The classical critical load is defined as the smallest eigenvalue of the linear boundary value problem obtained by the linearization of the nonlinear equations system relative to the trivial solution. Four types of boundary conditions are treated: all edges are variably restrained; all edges are simply supported; two opposite edges are stress-free, and the other two are either variably restrained or simply supported. Uniformly distributed compressive loads are equal on the opposite edges. It is established that if the measure of inconsistency is odd on one variable and odd or even on another variable, then the stresses caused only by internal sources, do not lead to the loss of the flat equilibrium state and do not affect the critical values of compressive loads.

Keywords: elastic plate, dislocations and disclinations, critical load.

Введение. В работе Л. М. Зубова [1] на основе уравнений Кармана построена система нелинейных уравнений равновесия упругих пластин, содержащих внутренние источники напряжений, вызванных дислокациями и дисклинациями. Рассмотрена задача об изгибе мембраны вследствие релаксации вызванных дефектами внутренних напряжений, которая сведена к уравнению Монжа-Ампера. Найдено несколько точных решений о форме поверхности мембраны, содержащей распределенные дисклинации. В [2] рассмотрена задача о влиянии внутренних напряжений на

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00142_А).

** E-mail: peshkhoev@rambler.ru

*** The research is done with the financial support from RFFI (project 14-08-00142_A).

прогибы и напряженное состояние круглой упругой пластины, испытывающей поперечное давление. Установлено, что наличие дисклинаций приводит к нелинейному увеличению прогиба. Исследованы задачи об устойчивости и послекритическом поведении нагруженной контурным давлением круглой пластины с непрерывно распределенными дисклинациями. Найдены вызванные дисклинациями осесимметричные закритические формы изгиба пластинки, которые существуют при отсутствии внешней нагрузки. Установлено, что при переходе пластинки из плоского состояния в изогнутую форму уменьшается величина внутренних напряжений.

В работе В. А. Треногина [3] был развит метод Ляпунова–Шмидта в операторной форме для нелинейных уравнений в банаховых пространствах. В работе [4] Л. С. Срубщик и В. А. Треногин исследовали задачу о влиянии малой поперечной нагрузки на выпучивание и послекритическое поведение пластины произвольной формы под действием параллельных осям координат сжимающих краевых усилий.

В работе Рейсснера [5] рассмотрена задача о влиянии нелинейно-упругого основания на выпучивание и начальное послекритическое поведение безмоментного плоско-напряженного состояния в случае бесконечной пластины с малыми геометрическими несовершенствами, а в случае тонкой сжатой пластины строго выпуклой формы со свободным краем при дополнительном действии малой поперечной нагрузки эта задача решена Л. С. Срубщиком [6]. В работах [7, 8] исследована задача о влиянии малой поперечной нагрузки на послекритическое поведение прямоугольной гибкой пластины, лежащей на нелинейно-упругом основании и равномерно сжатой в продольном направлении, а в [9] эта же задача рассмотрена для пластины с дислокациями и дисклинациями. С помощью операторного метода Ляпунова–Шмидта определено количество решений, соответствующих новым формам равновесий, и для каждого из них строятся асимптотические представления.

1. Постановка задач

1. 1. Система уравнений равновесия и краевые условия. Пусть тонкая упругая прямоугольная пластина, содержащая в плоском состоянии поля непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, находится под действием малой нормальной нагрузки интенсивности $\xi G(X,Y)$ и внешнего краевого усилия, составляющие которого вдоль осей X и Y равны соответственно P и Q. Тогда система уравнений равновесия записывается в виде [1, 10]

$$\begin{cases} D\Delta^2 W = [\Psi, W] + \xi G \\ \Delta^2\Psi + Eh[W,W]/2 = Eh\mu \end{cases} \tag{1.1}$$
$$D = Eh^3/12(1-\nu^2),\ [\Psi, W] \equiv W_{XX}\Psi_{YY} - 2W_{XY}\Psi_{XY} + W_{YY}\Psi_{XX}$$

Здесь

$\mu(X,Y)$ — скалярная мера несовместности, которая выражается через плотности дислокаций и дисклинаций, $W(X,Y)$ — прогиб пластины, $\Psi(X,Y)$ — функция напряжений Эри, h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, X, Y — прямоугольные координаты с началом в центре пластины и осями, параллельными ее краям, ξ — малый числовой параметр.

Систему (1.1) будем исследовать с краевыми условиями одного из следующих типов [9, 10]

$$\begin{cases} W = W_X = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{YY} = -P, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W = W_Y = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{XX} = -Q, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} W = W_{XX} = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{YY} = -P, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W = W_{YY} = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{XX} = -Q, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} W = W_X = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{YY} = -P, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W_{YY} + \nu W_{XX} = W_{YYY} + (2-\nu)W_{XXY} = \Psi_{XY} = \Psi_{XX} = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} W = W_{XX} = \Psi_{XY} = 0, \Psi_{YY} = -P, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W_{YY} + \nu W_{XX} = W_{YYY} + (2-\nu)W_{XXY} = \Psi_{XY} = \Psi_{XX} = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \tag{1.5}$$

Краевые условия (1.2) отвечают свободному защемлению, а (1.3) — подвижной шарнирной опоре краев. Сжимающие усилия равномерно распределены по краям $X = \pm a/2$ и $Y = \pm b/2$ соответственно. Условия для $|Y| = b/2$ в (1.4) и (1.5) соответствуют свободному краю. В этих случаях сжимающие усилия приложены только к краям $X = \pm a/2$.

Пусть $\Psi = \Phi - PY^2/2 - QX^2/2$. Тогда функция Φ удовлетворяет однородным краевым условиям $\Phi_{XY} = \Phi_{YY} = 0$ при $|X| = a/2$, $\Phi_{XY} = \Phi_{XX} = 0$ при $|Y| = b/2$. Заменяя эти условия на эквивалентные $\Phi = \Phi_X = 0$ при $|X| = a/2$, $\Phi = \Phi_Y = 0$ при $|Y| = b/2$, перепишем систему уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) — (1.5) в виде

$$\begin{cases} D\Delta^2 W + PW_{XX} + QW_{YY} = [\Phi, W] + \xi G \\ \Delta^2 \Phi + Eh[W, W]/2 = Eh\mu \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} W = W_X = \Phi = \Phi_X = 0, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W = W_Y = \Phi = \Phi_Y = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} W = W_{XX} = \Phi = \Phi_X = 0, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W = W_{YY} = \Phi = \Phi_Y = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} W = W_X = \Phi = \Phi_X = 0, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W_{YY} + \nu W_{XX} = W_{YYY} + (2-\nu) W_{XXY} = \Phi = \Phi_Y = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} W = W_{XX} = \Phi = \Phi_X = 0, |X| = a/2, |Y| < b/2 \\ W_{YY} + \nu W_{XX} = W_{YYY} + (2-\nu) W_{XXY} = \Phi = \Phi_Y = 0, |Y| = b/2, |X| < a/2 \end{cases} \quad (1.10)$$

В случае краевых условий (1.9) или (1.10) считаем, что $Q = 0$ в (1.6).

1.2. Переход к безразмерным переменным. В (1.6) — (1.10) перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} & X = ax, Y = by, W(X, Y) = w(x, y)h/\gamma, \Phi(X, Y) = D\overline{F}(x, y) \\ & P = Dp/b^2, Q = Dq/(\alpha a^2), G(X, Y) = hdg(x, y)/(\gamma b^4) \\ & \alpha = b^2/a^2, \mu = \overline{\mu}\gamma^2/h^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

С учетом (1.11) система (1.6) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \Delta_\alpha^2 w + p\alpha w_{xx} + qw_{yy} = \alpha[w, \overline{F}] + \xi g \\ \Delta_\alpha^2 \overline{F} + \alpha[w, w]/2 = \overline{\mu}, \quad |x| < 1/2, \quad |y| < 1/2, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Delta_\alpha(\ ) \equiv (\ )_{yy} + \alpha(\ )_{xx}, \quad \Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha \Delta_\alpha$$

Введем числовой параметр r такой, что $\overline{\mu}(x, y) = r\mu_1(x, y)$, где $\mu_1(x, y)$ фиксированная функция. Обозначим через F_1 решение краевой задачи

$$\Delta_\alpha^2 F = \mu_1(x, y), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & F = F_x = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ & F = F_y = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда решением задачи $\Delta_\alpha^2 F = \overline{\mu}(x, y)$ с краевыми условиями (1.14) будет функция $F_\mu = rF_1$. Назовем переменную r параметром интенсивности напряжений, вызванных внутренними источниками пластины.

Положим $\overline{F} = rF_1 + F$. Учитывая (1.11) — (1.14), выводим краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta_\alpha^2 w + p\alpha w_{xx} + qw_{yy} = \alpha[w, F] + r\alpha[w, F_1] + \xi g \\ \Delta_\alpha^2 F + \alpha[w, w]/2 = 0, \quad |x| < 1/2, \quad |y| < 1/2, \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} w = w_x = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ w = w_y = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} w = w_{xx} = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ w = w_{yy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} w = w_x = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ w_{yy} + \nu\alpha w_{xx} = w_{yyy} + (2-\nu)\alpha w_{xxy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} w = w_{xx} = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ w_{yy} + \nu\alpha w_{xx} = w_{yyy} + (2-\nu)\alpha w_{xxy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (1.19)$$

Функция F в (1.15) должна удовлетворять краевым условиям (1.14).

При $\xi = 0$ краевая задача (1.15) с каждым из краевых условий (1.16) — (1.19) при всех значениях параметров p, q, r имеет тривиальное решение $(w_*, F_*) = (0,0)$.

2. Критические нагрузки выпучивания основного равновесия

2.1. Исследование линеаризованных задач. В работе [9] с использованием результатов [11–13] показано, что критические нагрузки выпучивания основного равновесия определяются из линейной краевой задачи на собственные значения

$$\Delta_\alpha^2\omega + q\omega_{yy} - r\alpha[\omega, F_1] = -p\alpha\omega_{xx} \quad (2.1)$$

с параметрами q, r и одним из следующих краевых условий

$$\begin{cases} \omega = \omega_x = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ \omega = \omega_y = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_{xx} = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ \omega = \omega_{yy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_x = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ \omega_{yy} + \nu\alpha\omega_{xx} = \omega_{yyy} + (2-\nu)\alpha\omega_{xxy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_{xx} = 0, |x| = 1/2, |y| < 1/2 \\ \omega_{yy} + \nu\alpha\omega_{xx} = \omega_{yyy} + (2-\nu)\alpha\omega_{xxy} = 0, |y| = 1/2, |x| < 1/2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь в случае краевых условий (2.4) или (2.5) в уравнении (2.1) полагается $q = 0$.

Введем линейные операторы A и B

$$A\omega \equiv \Delta_\alpha^2\omega + q\omega_{yy} - r\alpha[\omega, F_1], \; B\omega \equiv -\alpha\omega_{xx} \quad (2.6)$$

Задачи на собственные значения (2.1) с краевыми условиями (2.2–2.5) в случае $r = 0$ исследованы, где показано, что оператор A формально самосопряжен и ограничен снизу [14]. Формальная самосопряженность оператора A в случае $r \neq 0$ следует из равенства

$$\iint_\Omega [\omega, F]\omega dxdy = \iint_\Omega [\omega, \omega] F dxdy$$

где функция ω удовлетворяют одному из краевых условий (2.2)–(2.5), а функция F—условиям (1.14). Ограниченность снизу оператора A в случае $r \neq 0$ следует из неравенства

$$\left| \iint_\Omega [\omega, F]\omega dxdy \right| = \left| \iint_\Omega [\omega, \omega] F dxdy \right| \le c \left| \iint_\Omega \omega\Delta_\alpha^2\omega \, dxdy \right|$$

которое следует из неравенств Фридрихса [14].

Так как в задаче на собственные значения (2.1) оператор A формально самосопряжен и ограничен снизу, а оператор B положительно определен [13], то можно применять результаты §§39, 40, 44 из [15] и свести задачу к минимизации функционала

$$J(\omega) = \frac{(A\omega, \omega)}{(B\omega, \omega)}, \; (u, v) \equiv \iint_\Omega uv dxdy, \quad (2.7)$$

где функция ω удовлетворяет одному из краевых условий (2.2)–(2.5). Приходим к следующему алгоритму [14, 16]. Пусть известны первые собственные значения $p_1 \le p_2 \le \ldots p_{n-1}$ и соответствующие собственные функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ задачи (2.4) при заданных значениях параметров q и r. Задаем начальное приближение $\omega_n^{(0)}$ к собственной функции ω_n. Для I = 0,1… выполняем следующие действия

1) вычисляем $(i+1)$ – е приближение к собственному значению p_n

$$p_n^{(i+1)} = J\left(\omega_n^{(i)}\right) \quad (2.8)$$

2) находим $\tilde{\omega}_n^{(i+1)}$ из уравнения

$$A\tilde{\omega}_n^{(i+1)} = p_n^{(i+1)} B\omega_n^{(i)} \qquad (2.9)$$

при соответствующих краевых условиях из (2.5)–(2.8);

3) ортогонализируем решение $\tilde{\omega}_n^{(i+1)}$ к первым $n-1$ собственным функциям по энергии оператора B

$$\overline{\omega}_n^{(i+1)} = \tilde{\omega}_n^{(i+1)} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j \left(B\tilde{\omega}_n^{(i+1)}, \omega_j\right) \Big/ \left(B\omega_j, \omega_j\right) \qquad (2.10)$$

4) вводим функцию $\omega_n^{(i+1)}$

$$\omega_n^{(i+1)} = \overline{\omega}_n^{(i+1)} \Big/ \left\|\overline{\omega}_n^{(i+1)}\right\|, \ \|\omega\| \equiv \max_{(x,y)\in\Omega} |\omega(x,y)| \qquad (2.11)$$

Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости $\left|p_n^{(i+1)} - p_n^{(i)}\right| \le \varepsilon$, где ε – заданная погрешность.

Критическое значение параметра r_0 определяется как наименьшее собственное значение задачи

$$\Delta_\alpha^2 \omega + p\alpha\omega_{xx} + q\omega_{yy} = r\alpha[\omega, F_1] \qquad (2.12)$$

при заданных значениях параметров p и q с каждым из краевых условий (2.2–2.5) (в случаях (2.4), (2.5) полагается $q = 0$). Если в (2.12) $p = q = 0$, то при $r = r_0$ пластина теряет устойчивость плоского равновесного состояния под действием только внутренних источников напряжений.

Для решения задачи (2.12) применяется минимизация функционала (2.7), где операторы A и B определяются по формулам

$$A\omega \equiv \Delta_\alpha^2 \omega + p\,\alpha\,\omega_{xx} + q\,\omega_{yy}, \ B\omega \equiv \alpha[\omega, F_1] \qquad (2.13)$$

Здесь оператор A ограничен снизу [15], а знакоопределенность оператора B зависит от свойств функции F_1, т.е. от свойств меры несовместности $\mu_1(x, y)$.

В силу симметрии краевых условий (2.2)–(2.5) относительно начала координат при условии четности или нечетности функции F_1 по каждой переменной собственные функции ω задач (2.1) и (2.12) являются соответственно четными или нечетными по каждой переменной. Отсюда следует, что если функция F_1 является нечетной по одной переменной и четной или нечетной по другой переменной, то для оператора B в (2.13) справедливо

$$(B\omega, \omega) = \alpha\iint_\Omega [\omega, F_1]\omega dxdy = \alpha\iint_\Omega [\omega, \omega]F_1 dxdy = 0 \qquad (2.14)$$

и для оператора A в (2.6) имеем

$$(A\omega, \omega) = \left(\Delta_\alpha^2 \omega + q\omega_{yy} - r\alpha[\omega, F_1], \omega\right) = \left(\Delta_\alpha^2 \omega + q\omega_{yy}, \omega\right) \qquad (2.15)$$

Из (2.14), (2.15) следует, что задача (2.12) имеет только тривиальное решение $\omega = 0$, а в задаче (2.1) собственные значения не зависят от параметра r. Это означает, что если мера несовместности $\mu_1(x, y)$ является нечетной по одной переменной и четной или нечетной по другой переменной, то напряжения, вызванные внутренними источниками, не приводят к потере устойчивости плоского равновесного состояния и не влияют на критические значения сжимающих нагрузок p и q.

Если функция F_1 такова, что оператор B в (2.13) положительно определен, то задача (2.12) разрешима методом минимизации функционала (2.7), т.е. критическое значение $r = r_0$ существует.

В данной работе для каждой конкретной функции F_1, являющейся решением задачи (1.13), (1.14) при заданной мере несовместности $\mu_1(x, y)$ существование решения задачи (2.12) определялось численными экспериментами, т.е. проверялась сходимость алгоритма (2.8)–(2.11), где вместо параметра p_n используется r_n, а операторы A и B определены формулами (2.13). Полученные при заданных значениях параметров $p = p_0$, $q = q_0$ собственное значение r_0 и собственная функция ω_0 задачи (2.12) сверялись с собственным значением p_* и собственной функцией ω_* задачи (2.1) при заданных значениях $r = r_0$, $q = q_0$. Во всех случаях сходимости алгоритма (2.8)–(2.11) наблюдалось $p_* \approx p_0$ и $\omega_* \approx \omega_0$ с погрешностью менее 0,001.

2.2. Результаты численных расчетов. Для краевых условий (2.3) решения уравнения (2.1) при $r = 0$ выписываются явно [10]

$$p_{m,n} = \left[\pi^4\left(\alpha m^2 + n^2\right)^2 - q\pi^2 n^2\right] \Big/ \left(\alpha\pi^2 m^2\right) \qquad (2.16)$$

$$\omega_{m,n} = \sin(\pi m(x + 0{,}5))\sin(\pi n(y + 0{,}5)) \qquad (2.17)$$

где *m, n* — натуральные числа. Для остальных краевых условий при $r = 0$ и для всех краевых условий при $r \neq 0$ задача (2.1) решалась по алгоритму (2.8)–(2.11) с применением разностного метода и квадратурной формулы Симпсона.

Формулы (2.16), (2.17) использовались в тестовых расчетах при отладке программ. Из (2.16) следует, что при $r = 0$ и $q = \pi^2(1 - 4\alpha^2)/\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$ минимальному собственному значению $p_{\min} = p_{1,1} = p_{2,1} = \pi^2(5\alpha + 2)/\alpha$ отвечают две собственные функции $\omega_{1,1}$ — четная по обеим переменным, и $\omega_{2,1}$— нечетная по переменной x, четная по переменной y.

Рассмотрим случай постоянной меры несовместности, т.е. в задаче (1.13) $\mu_1(x, y) = 1$. Тогда решение задачи (1.13), (1.14) — функция F_1 является четной по обеим переменным, что подтверждается численным решением этой задачи разностным методом. На рис.1 для случая квадратной пластины приведены графики функции F_1 и её вторых производных $F_{1,xx}$, $F_{1,xy}$, $F_{1,yy}$, которые позволяют судить о распределении напряжений, обусловленных внутренними источниками.

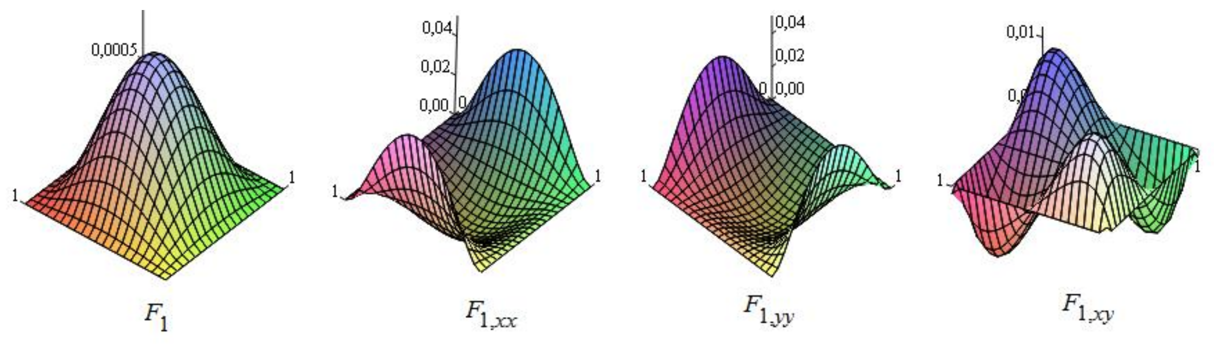


Рис.1. Графики функции F_1 и её вторых производных $F_{1,xx}$, $F_{1,yy}$, $F_{1,x,y}$

С помощью численных экспериментов найдены критические значения параметров нагрузок *p, q, r* которым отвечают одна или две собственные функции при различных значениях геометрического параметра $\alpha = b^2/a^2$ и краевых условиях (2.2)–(2.5). Отметим основные результаты для прямоугольных пластин при $\alpha = 1/4$, 1, 4. Для случая $r = r_0$, $p = 0$, $q = 0$ (пластина теряет устойчивость плоского равновесного состояния под действием только внутренних источников напряжений) установлено, что для закрепленной по краям платины (условия (2.5), (2.6)) $r_0 > 0$, а для пластины с двумя свободными краями (условия (2.4), (2.5)) $r_0 < 0$. На рис.2 приведены графики первой и второй собственных функций задачи (2.12) с условиями (2.4) для квадратной пластины при $p = 0$, $q = 0$.

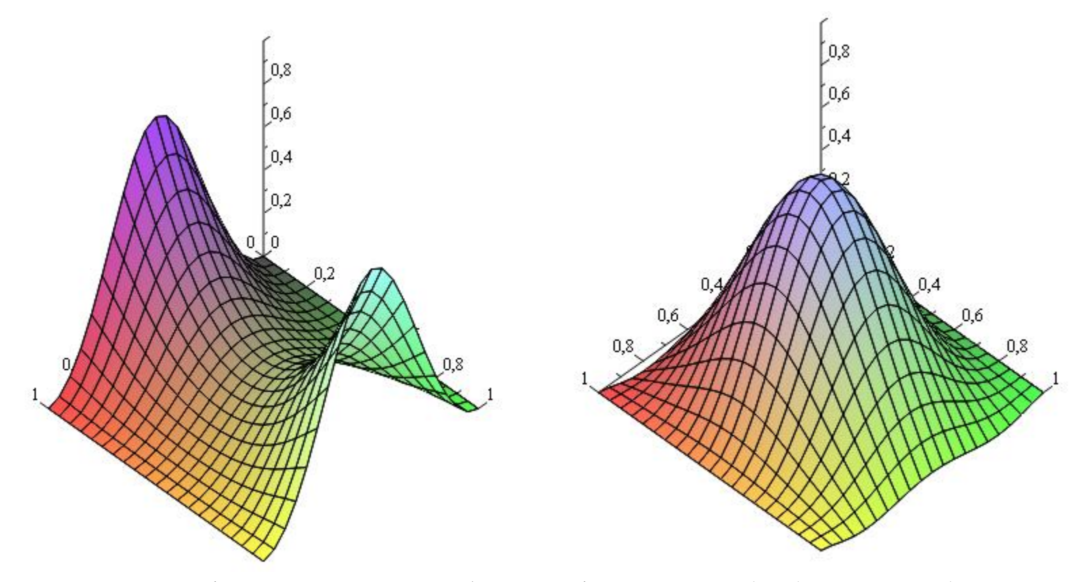


Рис.2. Графики первой и второй собственных функций задачи (2.12) с условиями (2.4) для квадратной пластины

В табл.1 приведены значения первого и второго собственных значений r_1, r_2 задачи (2.12) с условиями (2.4) для квадратной пластины при различных значениях параметра p $(q = 0)$.

Таблица 1

Собственные значения r_1, r_2 задачи (2.12) с условиями (2.4)

p	r_1	r_2
0	-3794	3719
7,73	-3282	3334
15,45	-2741	2910
23,17	-2123	2424
30,89	-1371	1812
38,62	0,11	590

В табл. 2 приведены критические значения r_0 для $p = q = 0$ при различных значения параметра $\alpha = b^2/a^2$, $a = 1$ и краевых условиях (2.2) – (2.5).

Таблица 2

Критические значения r_0 для $p = q = 0$

Краевые условия	$\alpha = 1/4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$
(2.2)	40807	4354	2550
(2.3)	27856	2595	1740
(2.4)	-16997	-3794	-3088
(2.5)	-10166	-2120	-1708

Заключение.

1) Для рассматриваемого в работе случая симметрии краевых условий относительно начала координат установлено, что если мера несовместности является нечетной по одной переменной и четной или нечетной по другой переменной, то напряжения, вызванные внутренними источниками, не приводят к потере устойчивости плоского равновесного состояния и не влияют на критические значения сжимающих нагрузок.

2) Для постоянной меры несовместности на примере квадратной пластины при различных значениях сжимающей нагрузки численными экспериментами показано существование положительных и отрицательных критических значений параметра интенсивности напряжений, вызванных внутренними источниками (табл.1).

Автор благодарит профессоров Л. М. Зубова и Л. С. Срубщика за помощь в работе.

Библиографический список

1. Зубов, Л. М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями // Доклады РАН. — 2007. — Т.412, № 3. — С. 343–346.

2. Зубов, Л. М. Сильный изгиб круглой пластинки с непрерывно распределенными дисклинациями / Л. М. Зубов, Т. Х. Фам // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2010. № 4. — С. 28–33.

3. Треногин, В. А. Разветвление решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве / В. А. Треногин // Успехи матем. наук. — 1958. — Т. 13. Вып. 4.

4. Срубщик, Л. С. О выпучивании гибких пластин / Л. С. Срубщик, В. А. Треногин // ПММ. — 1968. — Т. 32. Вып.4. — С. 721–727.

5. Reissner E. On Postbuckling Behavior and imperfection sensitivity of Thin Elastic Plates on a Non-linear Elastic Foundation / E. Reissner // Studies in Appl. Math. — 1970. — Vol. XLIX, N. 1. — P. 45–57.

6. Срубщик, Л. С. Краевой эффект и выпучивание тонких пластин на нелинейно-упругом основании / Л. С. Срубщик // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. XXI, № 10. — С.1790–1794.

7. Пешхоев, И. М. Выпучивание и послекритическое поведение сжатой прямоугольной пластины на нелинейно-упругом основании / И. М. Пешхоев, Л. С. Срубщик. — Ростов-на-Дону, 1983. — 17 с. — Деп. в ВИНИТИ 07.83, № 4037–83.

8. Баул А. В. Влияние начальных несовершенств на выпучивание продольно сжатых прямоугольных цилиндрических панелей и пластин / А. В. Баул, И. М. Пешхоев, Л. С. Срубщик // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 1986. — № 1. — С.34–37.

9. Пешхоев, И. М. Ветвление равновесий сжатой упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями / И. М. Пешхоев // XI всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, сб. докл., Казань, 20 – 24 августа 2015 г., — С. 2989–2991.

10. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — Москва : Физматгиз, — 1966. — 636 с.

11. Ворович, И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек/ И. И. Ворович. — Москва : Наука, 1989. — 376 с.

12. Морозов, Н. Ф. К нелинейной теории тонких пластин / Н. Ф. Морозов // Доклады АН СССР. — 1957. — Т.114, № 5. — С. 968–671.

13. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — Москва : Наука, 1969. — 528с.

14. Пешхоев, И. М. Асимптотика и ветвление равновесий сжатых упругих прямоугольных пластин и стержней на нелинейно упругом основании : диссерт. … к-та физ.-мат. наук / И. М. Пешхоев. — Ростов-на-Дону, 1991. — 146с.

15. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — Москва : Наука, 1970. — 512с.

16. Bauer, L. Block five diagonal matrices and the fast numerical solution of the biharmonic equation / L. Bauer, E. Reiss // Math. Comput. — 1972. — V.26, 118. — P. 311–326.

References

1. Zubov, L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklinatsiyami. [Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations.] Doklady Akademii Nauk, 2007, vol. 412, no. 3, pp. 343–346 (in Russian).

2. Zubov, L.M., Pham Thu Huong. Sil'nyy izgib krugloy plastinki s nepreryvno raspredelennymi disklinatsiyami. [Strong bending of circular plate with continuously distributed disclinations.] Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Natural Sciences. 2010, no. 4, pp. 28–33 (in Russian).

3. Trenogin, V.A. Razvetvlenie resheniy nelineynykh uravneniy v banakhovom prostranstve. [Branching of solutions of non-linear equations in Banach space.] Russian Mathematical Surveys, 1958, vol. 13, iss. 4 (in Russian).

4. Srubshchik, L.S., Trenogin, V.A. O vypuchivanii gibkikh plastin. [On buckling of flexible plates.] Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1968, vol. 32, iss. 4, pp. 721–727 (in Russian).

5. Reissner E. On Postbuckling Behavior and imperfection sensitivity of Thin Elastic Plates on a Non-linear Elastic Foundation. Studies in Appl. Math., 1970, vol. XLIX, no. 1, pp. 45–57.

6. Srubshchik, L.S. Kraevoy effekt i vypuchivanie tonkikh plastin na nelineyno-uprugom osnovanii. [The edge effect and buckling of thin plates on nonlinear elastic foundation.] Differential Equations, 1985, vol. XXI, no. 10, pp.1790–1794 (in Russian).

7. Peshkhoev, I.M. Srubshchik, L.S Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie szhatoy pryamougol'noy plastiny na nelineyno-uprugom osnovanii. [Buckling and post critical behavior of compressed rectangular plate on nonlinear elastic foundation.] Rostov-on-Don, 1983, 17 p. Dep. in VINITI 07.83, no. 4037–83 (in Russian).

8. Baul, A.V., Peshkhoev, I.M., Srubshchik, L.S Vliyanie nachal'nykh nesovershenstv na vypuchivanie prodol'no szhatykh pryamougol'nykh tsilindricheskikh paneley i plastin. [Influence of initial imperfections on the buckling of longitudinally compressed rectangular cylindrical panels and plates.] Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Natural Sciences.1986, no. 1, pp. 34–37 (in Russian).

9. Peshkhoev, I.M. Vetvlenie ravnovesiy szhatoy uprugoy pryamougol'noy plastiny s dislokatsiyami i disklinatsiyami. [Branching of equilibria of compressed elastic rectangular plate with dislocations and disclinations.] XI vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki, sb. dokl., Kazan', 20 – 24 avgusta 2015 g. [Proc. XI All-Russian Congress on fundamental issues of Theoretical and Applied Mechanics, Kazan, 20 -. 24 August, 2015] pp. 2989–2991 (in Russian).

10. Timoshenko, S.P., Voynovsky-Krieger, S. Plastinki i obolochki. [Plates and shells.] Moscow: Fizmatgiz, 1966, 636 p. (in Russian).

11. Vorovich, I.I. Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek. [Mathematical problems of non-linear shallow-shell theory.] Moscow: Nauka, 1989, 376 p. (in Russian).

12. Morozov, N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin. [On nonlinear theory of thin plates.] Doklady AN SSSR, 1957, vol. 114, no. 5, pp. 968–671 (in Russian).

13. Weinberg, M.M., Trenogin, V.A. Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy. [Theory of branching of nonlinear equation solutions] Moscow: Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).

14. Peshkhoev, I.M. Asimptotika i vetvlenie ravnovesiy szhatykh uprugikh pryamougol'nykh plastin i sterzhney na nelineyno uprugom osnovanii: dissert. … k-ta fiz.-mat. nauk. [Asymptotics and branching of equilibria of compressed elastic rectangular plates and rods on nonlinear elastic foundation: Cand.Sci. (Phys.-Math.) diss.]. Rostov-on-Don, 1991, 146 p. (in Russian).

15. Mikhlin, S.G. Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike. [Variational methods in mathematical physics] Moscow: Nauka, 1970, 512 p. (in Russian).

16. Bauer, L., Reiss, E. Block five diagonal matrices and the fast numerical solution of the biharmonic equation. Math. Comput., 1972, vol. 26, 118, pp. 311–326.

Поступила в редакцию 28.08.2015
Сдана в редакцию 28.08.2015
Запланирована в номер 22.01.2016